Die Ikonizität der Peirceschen Existentiellen Graphen aus der Sicht der Formalen Logik

Frithjof Dau, SAP Research CEC Dresden, Germany

Summary: Due to the rise of formal, visual languages, researchers from mathematics and theoretical computer science have recently become more interested in Peirce's Existential Graphs. In this setting, the graphs are usually understood as a graph-based formalization of first order predicate logic, equipped with a sound and complete calculus. This calculus consists of fairly complex rules and reminds of Gentzen's natural deduction calculus. The present contribution shortly investigates the role of Peirce's Graphs in his oeuvre and discusses how Peirce came to design the appearance of the graphs and the derivation rules and points out in which respects the graphs differ from the usual symbolic accounts of formal logic. It is emphasized that Peirce did not devize the rules as a calculus, but as an instrument for the investigation mathematical argumentations. It transpires that the iconicity of the derivation rules is not based on the visual appearance of the graphs (as this is often assumed), but on the resemblance between the rules and certain patterns of mathematical reasoning.

Zusammenfassung: Im Rahmen der zunehmenden Verbreitung formaler, visueller Sprachen kommt den Peirceschen Existentiellen Graphen in letzter Zeit eine verstärkte Aufmerksamkeit aus der Mathematik und der theoretischen Informatik zu. Die Graphen werden dabei als eine graph-basierte Formalisierung der Prädikatenlogik erster Stufe verstanden, versehen mit einem korrekten und vollständigen Kalkül aus recht komplexen Regeln, der am ehesten an den Kalkül des natürlichen Schließens von Gentzen erinnert. Der vorliegende Beitrag beleuchtet kurz die Rolle der Existentiellen Graphen im Peirceschen Gesamtwerk und beschreibt aufbauend, wie Peirce zur Konzeption sowohl der Darstellung der Graphen als auch der Ableitungsregeln kam. Aus der Sicht der formalen Logik wird herausgearbeitet, in welcher Weise sich die Formalisierung der Logik in Form von Graphen von den gängigen, symbolischen Logikformalisierungen unterscheidet. Es wird betont, dass Peirce die Ableitungsregeln nicht als Kalkül konzipiert hat, sondern als Instrument zur Untersuchung mathematischer Argumentationen. Auf dieser Grundlage wird für die Ikonizität der Ableitungsregeln herausgestellt, dass nicht, wie teilweise fälschlich angenommen, die visuelle Darstellungsform der Graphen entscheidend ist, sondern die Ähnlichkeit der Ableitungsregeln von Mustern mit bestimmten Denkprozessen.

1. Die Rolle der Existentiellen Graphen im Peirceschen Gesamtwerk

Das umfassende Ziel des Peirceschen Gesamtwerkes ist die Untersuchung des menschlichen (logischen) Denkens und der Entstehung von Wissen aus mathematischer und philosophischer Sicht. Wie Hookway in (Hookway, 1985) schreibt: “Inspiriert durch Kant, hat er sein Leben den Grundlagen des Wissens gewidmet und im Rahmen dessen verschiedene philosophische Lehren zusammengeführt”[1].

Im Rahmen dieser Abhandlung ist der Zusammenhang von Semiotik und logischem Denken wichtig. Peirce hat die Semiotik nicht als bloße Metawissenschaft betrachtet, sondern hat vor allem die Rolle von Zeichen im menschlichen Denkprozess untersucht. In seiner Arbeit ‘Questions concerning certain Faculties Claimed for Man’ (1868, siehe § 5.213-5.263[2]) kommt er zu dem Schluss, dass “sich alle Gedankengänge notwendigerweise in Zeichen manifestieren”[3]. Die grundlegenden Zeichenarten Index, Ikon und Symbol sind “notwendiger Bestandteil aller Denkprozesse”[4] (§ 5.243). Die Allgegenwart von Zeichen fasst Pape in (Pape, 1983) wie folgt zusammen: “Alle intellektuelle und sinnliche Erfahrung – gleich welcher vorsprachlichen oder vorbewußten Stufe – kann so verallgemeinert werden, daß sie in einer universalen Darstellung interpretierbar ist.’”

Da sich Denken und logisches Schließen in Zeichen abspielt, bedingt eine Untersuchung des Denkens eine Untersuchung der Zeichen, auf denen Denken basiert. In § 1.444 beschreibt Peirce sein umfassendes Verständnis des Begriffes ‘Logik’ und ‘Semiotik’ wie folgt: “Der Terminus ‘Logik’ ist […] im allgemeineren Verständnis die Wissenschaft der notwendigen Gesetze des Denkens, oder, besser ausgedrückt (Denken findet immer in Zeichen statt), generelle Semiotik. Logik betrachtet nicht nur die Wahrheit, sondern auch die allgemeinen Bedingungen, unter denen Zeichen Zeichen sind, […], und auch die Gesetze der Entwicklung von Gedanken.”[5] In diesem Verständnis untersuchen sowohl Logik als auch Semiotik die Gesetze des menschlichen Denkens, nur aus unterschiedlichen Perspektiven.

Peirce hat seine Existentiellen Graphen entwickelt, um die Gesetze des notwendigen Schließens (neccessary reasoning)oder mathematischen Schließens (mathematical reasoning) –Peirce identifiziert diese beiden Arten des Schließens– zu untersuchen. In § 4.69 beschreibt er sogar die Richtigkeit einer Implikation mit Hilfe einer Wahrheitstabelle genau so, wie es heute in der Aussagenlogik üblich ist. So ist es nicht verwunderlich, dass für Peirce die Richtigkeit einer notwendigen Schlussfolgerung nur von ihrer Form, und nicht von den verwendeten Fakten abhängig ist. Ein Schluss ist nur dann allgemein gültig, wenn er in jedem denkbaren Universum gültig ist: Die Annahmen, auf denen ein notwendiger Schluss basiert, sind einem “beliebigen hypothetischen Universum, einer Schöpfung des Geistes”[6] (§ 4.431) entnommen. Nur das mathematische Schließen abstrahiert von Fakten und (beispielsweise physikalischen) Gesetzen der realen Welt und betrachtet stattdessen alle hypothetischen, denkbaren Universen. Aus diesem Grund auch ist für Peirce die Mathematik die allgemeinste aller Wissenschaften, sogar allgemeiner als die Philosophie.

Zum Zeitpunkt der Entwicklung der Existentiellen Graphen entstanden nach einer absoluten Dominanz der Aristotelischen Syllogismen neue Ansätze zu einer formalen Ausarbeitung von Logik und mathematischem Schließen. Zu nennen sind Boole, Schröder, Peano, Frege, aber wie Peirce schreibt, ist auch in den neuen Ansätzen die “Seele des Schließens noch nicht im logischen Netz eingefangen”[7] (§ 4.426). Warum ist es nun nötig, ein adäquates Werkzeug zu entwickeln, mit dem sich mathematische Aussagen und Schlüsse darstellen lassen? Peirce war zwar sowohl von der logischen Reinheit mathematischen Schließens als auch von den Fähigkeiten der Mathematiker zum mathematischen Schließen überzeugt, war sich aber trotzdem bewusst, dass Mathematiker menschlich sind und Fehler machen. In der vierten Vorlesung seiner Cambrigdge Lectures (Peirce, 1992) schreibt er: “Theoretisch, das kann ich garantieren, kann es beim notwendigen Schließen nicht zu Fehlern kommen. […] In der Praxis in in Wahrheit ist die Mathematik nicht vor der Fehleranfälligkeit gefeit, die allem anhaftet, was der Mensch tut”[8] (Hervorhebung durch Peirce).

Es stellt sich natürlich die Frage, warum Peirce trotzdem so viel Vertrauen in das mathematische Schließen hatte. Der Schlüssel liegt in der herausragenden Fähigkeit des menschlichen Denkens, sich selber zu kontrollieren und auch gegebenenfalls zu korrigieren. Denken ist ein bewusster Prozess und unterliegt der Beobachtung, der Kritik, dem Denkens selber.[9] Diese Fähigkeit zur Selbstkritik ist essentiell für das menschliche, logische Denken und unterscheidet das menschliche Denken von einem bloßen, mechanischen Anwenden von Schlussregeln. In seiner Arbeit ‘Ideals of Conduct’ (1.606) schreibt Peirce: “For reasoning is essentially thought that is under self-control.” (eine deutsche Übersetzung wird hier nicht gegeben, da eine adäquate Übersetzung des englischen Wortes ‘reasoning’ in die deutsche Sprache letztlich nicht existiert). Die Fähigkeit zur Selbstüberprüfung und -kritik impliziert die wichtige Eigenschaft, dass sich das Denken auch selbst korrigiert. Diese Selbstkorrektur betrifft nicht nur die Folgerungen menschlichen Schließens, sondern auch die Prämissen, und je mehr die Selbstkorrektur in den Denkprozess eingreift, desto zuverlässiger ist er (siehe Peirce, 1992). Dies trifft nicht nur auf abduktives oder induktives, sondern gerade auch auf das deduktive, also das mathematische Schließen zu.

Die Selbstkorrektur des Schließens kommt deshalb zum Tragen, weil die Entstehung von Wissen ein kollaborativer Prozess ist. Argumentieren und Schließen findet immer in einer Gemeinschaft auf der Basis rationaler Kommunikation statt, in der potentielles neues Wissen kommuniziert, observiert und diskutiert wird. Dieser Prozess führt von speziellem Wissen zu allgemeinem Wissen, und nähert sich so auf lange Sicht gesehen der zu erfassenden Wahrheit an. Das Wissen über die Realität, die Realität an sich konstituiert sich in diesem Prozess durch einen Konsens in der Gemeinschaft. Peirce schreibt in § 5.312 dass die "Wahrnehmung [der Realität] unabdingbar den Begriff einer GEMEINSCHAFT beinhaltet, die ohne feste Grenzen ist und die einen definitiven Zuwachs von Wissen ermöglicht"[10] (Hervorhebung durch Peirce). Es soll erwähnt werden, dass selbst der Denkprozess einer einzelnen Person als rationale Kommunikation verstanden werden kann, nämlich als eine Kommunikation der Person mit sich selbst. "Eine Person ist nicht absolut gesehen ein Individuum. Die Gedanken einer Person sind das, was 'sie zu sich selbst sagt', also zu diesem anderen Selbst sagt, welches im Lauf der Zeit entsteht"[11] (siehe § 5.421; in § 7.103 findet sich eine ähnliche Aussage).

Die Existentiellen Graphen dienen also dazu, mathematisches Schließen möglichst präzise zu explizieren, damit die betrachteten Schlüsse in einer Gemeinschaft rational erfasst, diskutiert, und gegebenenfalls korrigiert werden können. Peirce betont, dass die Graphen nicht wie ein Kalkül des Schließens dazu dienen, mathematische Schlussfolgerungen zu erzeugen, sondern das sie dazu dienen, Schließen im Nachhinein zu analysieren. Sie sind also ein analytisches und kein synthetisches Werkzeug. Dieses ist auch der Grund, weshalb Peirce das Ziel hatte, die Graphen so ikonisch wie möglich zu gestalten: Die Graphen sollen das mathematische Schließen bestmöglich reflektieren, um es damit diskutierbar zu machen. Oder, wie Roberts schön in Ro73 zusammenfasst: "Das Ziel war nicht Schließen zu ermöglichen, sondern das Studium des Schließens zu ermöglichen".[12]

2. Zur Ikonizität der Darstellung

2.1 Abstrakte und Konkrete Syntax

In sequentiellen, symbolischen Formalisierungen mathematischer Logik besteht keine Notwendigkeit, zwischen einer Formel und ihrer textuellen Darstellung zu unterscheiden, da jede Formel – betrachtet als mathematische Struktur – eine eindeutig gegebene, entsprechende Repräsentation hat. Bei diagrammatischen Formalisierungen mathematischer Logik hingegen ist die Unterscheidung zwischen den Strukturen und ihren Darstellungen wesentlich. Zur Erläuterung betrachten wir die folgenden Diagramme von Alpha- Graphen.

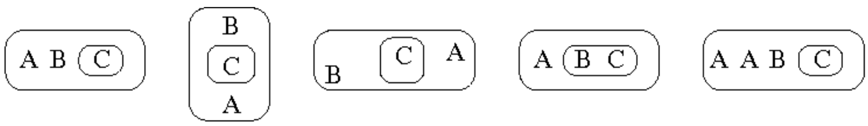


Abb. 1: Fünf Diagramme von drei Alpha-Graphen

Die Form von Negationsovalen oder der Ort von Aussagenvariablen oder Negationsovalen hat in Peirces Alpha-System keinerlei Relevanz (siehe beispielsweise seine "Convention No. Zero" für Alpha-Graphen in § 4.394). In der Tat hat Peirce seine Existentiellen Graphen nicht als graphische Entitäten betrachtet. Basierend auf seiner Zeichentheorie handelt es sich folglich bei den ersten drei Diagrammen nicht um verschiedene Existentielle Graphen, sondern um verschiedene Repräsentationen ein und desselben Graphen. Andererseits sind die letzten beiden Diagrame in der Tat zwei weitere, neue Graphen. Bei einer graphischen Diagramdarstellung ist es wesentlich zu wissen, welche der graphischen Entitäten wesentlich für den Inhalt des Diagrammes sind, und welche zufälliger, also unwesentlicher Natur sind. Beispielsweise ist in den obigen Diagrammen für ein Negationsoval wesentlich, welche weiteren Elemente des Diagrammes darin enthalten sind, der Ort oder die Form des Ovales sind aber zufällig gewählt, tragen also nicht zur Bedeutung des Diagrammes bei. Shin führt in (Shin, 2002) die Schwierigkeit, unwesentliche von wesentlichen graphischen Entitäten zu unterscheiden, und die damit verbundene, fälschliche Zuordnung von Inhalten zu unwesentlichen Entitäten als einen der wesentlichen Gründe an, die zur heutigen Ablehnung von

Diagrammen in mathematischen Beweisen führen. Stjernfelt diskutiert in (Stjernfelt, 2007) im Absatz "The Diagram as Type" dass jedes Diagram-Ikon, also jede graphische Diagramdarstellung, implizit symbolische (Lese)regeln beinhaltet die die Unterscheidung zwischen unwesentlichen und wesentlichen graphischen Entitäten modellieren.

Die Unterscheidung zwischen einem Graphen und seiner Repräsentation ist wesentlich für eine mathematisch einwandfreie Formalisierung der Existentiellen Graphen. Eine Formalisierung muss beispielsweise die Negationsovale eines Existentiellen Graphen als abstrakte Entität definieren, die nicht die Form oder den Ort des Ovals mit einbezieht, aber die erfasst, welche anderen Negationsovale oder welche Aussagenvariablen in dem betrachteten Oval enthalten sind. Erstaunlicherweise wird das in den wenigsten Arbeiten, die sich mit den Existentiellen Graphen aus der Sicht mathematischer Logik befassen, beachtet; beispielsweise versucht Shin in (Shin, 2002), Existentielle Graphen als graphische Strukturen zu definieren.

In (Howse et al., 2002; Dau, 2004) wird die Trennung von abstrakten Strukturen und deren graphischen Darstellungen in diagrammatischen Logiksystemen umfassend diskutiert. Beide Arbeiten argumentieren, dass es wesentlich ist, die abstrakten Strukturen – "abstrakte Syntax" genannt – mathematisch präzise zu formalisieren. Für die graphische Darstellung – "konkrete Syntax" genannt – kommen die Arbeiten allerdings zu unterschiedlichen Schlüssen. (Howse et al., 2002) argumentiert für eine mathematische Ausarbeitung auch der konkreten Syntax sowie einer mathematischen Analyse des Zusammenhangs zwischen abstrakter und konkreter Syntax. (Dau, 2004) hingegen argumentiert, dass eine mathematische Ausarbeitung der konkreten Syntax nicht notwendig ist.

Für diese Arbeit ist es unwesentlich, welcher der beiden Standpunkte eingenommen wird. Wesentlich ist, dass in sequentiellen, symbolischen Logikformalisierungen keine Unterscheidung zwischen Formel und Darstellung, zwischen abstrakter und konkreter Syntax getroffen wird, wohingegen diese Unterscheidung in nicht-sequentiellen, diagrammatischen Formalisierungen wesentlich ist. In anderen Worten: Symbolische Logik hat aus semiotischer Sicht eine einschichtige Architektur, diagrammatische Logik hat eine zweischichtige Architektur.

2.2 Die Ikonizität der Darstellung

Wie im letzten Paragraphen ausgeführt, vollzieht sich menschliches Schließen als ein rationaler Diskurs zwischen mehreren Beteiligten. Dieser Diskurs findet immer in einem Kontext statt. Für die Rationalität des Diskurses ist es entscheidend, dass sich die Diskursbeteiligten des Kontextes bewusst sind und sich darauf verständigen, dass sich der Diskurs auf diesen Kontext bezieht (siehe Logical Tracts. No. 2. 'On Existential Graphs, Euler's Diagrams, and Logical Algebra', MS 492). Existentielle Graphen als ein Instrument zur Explizierung logischer Argumente müssen also als erstes ein Instrument bereitstellen, mit dem man einen Bezug auf das Diskursuniversum herstellen kann. Peirce hatte das Ziel, eine diagrammatische Methode zur Argumentationsexplizierung zu entwickeln, und Diagramme benötigen als Darstellungsform von Annahmen einen Platz, auf dem sie gezeichnet werden. Aus diesem Grund führt er in § 4.430 das <u>Annahmeblatt</u> (sheet of assertion) ein; jedes Diagramm, dass auf das Annahmeblatt gezeichnet wird, drückt eine Annahme aus. Ein leeres Annahmeblatt stellt den Beginn eines Diagramms dar. Das Schreiben eines Diagramms auf das Annahmeblatt drückt aus, dass die durch das Diagramm dargestellte Annahme vom Schreiber für wahr gehalten wird.

Wie drückt man nun aus, dass mehrere Annahmen für wahr gehalten werden? Peirce beschreibt in § 4.433 ein Beispiel, in dem zwei (inhaltlich eher unabhängige) Aussagen an verschiedenen Stellen auf das Annahmeblatt geschrieben werden, und führt aus, dass die "unabhängige Präsenz beider Ausdrücke auf dem Annahmeblatt analog zur unabhängigen Wahrheit der beiden Aussagen ist".[13] Aus diesem Grund ist für Peirce die Darstellung der Konjunktion als Juxtaposition von Graphen im höchsten Masse ikonisch (a highly iconic mode of representation, § 4.433).

Die Ikonizität der Identitätslinien (line of identities) wird von Peirce mehrfach diskutiert. Beispielsweise erläutert er in § 4.385 an Hand eines Beispieles, wie man darstellen kann, dass ein Objekt zwei Prädikate *A* und *B* erfüllt, und argumentiert, dass eine einfache Verbindung von *A* und *B* diese Tatsache ikonisch darstellt, und dass ein Auftrennen dieser Linie wiederum eine ikonische Darstellung der Tatsache ist, dass *A* und *B* von zwei (möglicherweise, aber nicht notwendigerweise verschiedenen) Objekten erfüllt ist (eine ähnliche Argumentation findet sich in § 4.442). Peirce sieht durchaus, dass eine Identitätslinie nicht ausschließlich ikonisch ist, sondern auch die Merkmale von Indizes und Symbolen hat, aber er kommt trotzdem zu dem Schluss, dass sie "in höchstem Maße" ikonisch ist (§ 4.448).[14]

Bis dato haben wir Existentielle Graphen ohne Negationsovale untersucht. Diese Graphen entsprechen dem existentiell-konjunktiven Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe. Es soll erwähnt werden, dass jeder Graph dieses Fragmentes eine Ansammlung positiver Tatsachen repräsentiert. Derartige Graphen können so interpretiert werden, dass sie ein bestimmtes Modell, eine bestimmte Welt repräsentieren, in der genau diese Tatsachen gültig sind. Auf semiotischer Ebene findet sich diese Sichtweise in (Shin, 2002). Auch in der Psychologie des Denkens gibt es eine Theorie mentaler Modelle, und existentielle Graphen können als Repräsentationen dieser Modelle verstanden werden (siehe (Johnson-Laird, 2002)). Schließlich kann man auch mathematisch derartige Modelle beschreiben. Für die so genannten “Begriffsgraphen”, die auf den Existentiellen Graphen aufbauen, findet sich eine Untersuchung dieser Standardmodelle in (Dau, 2003a).

Die Negation wiederum lässt sich weder in den psychologischen mentalen Modellen noch in den mathematischen Standardmodellen adäquat erfassen. Wie Johnson-Laird aus psychologischer Sicht schreibt: Es gibt keine ikonische Repräsentation der Negation, […] die Negation kann nicht wahrgenommen werden[15] (Johnson-Laird, 2002). Der Grund ist, dass eine Verneinung einer positiven Tatsache in der Regel mit einer Disjunktion unendlich vieler möglicher Welten einher geht, in der die genannte Tatsache nicht gültig ist. Aus diesem Grund wird es eine hochgradig ikonische Darstellung der Negation nicht geben können.

Nichtsdestotrotz führt Peirce Argumente für die Darstellung der Negation durch Ovale an. Wir führen uns zunächst in Erinnerung, dass Peirce Implikationen in § 4.69 auf eine Art beschrieben hat, wie sie dem heutigem mathematischem Verständnis mit Hilfe von Wahrheitstabellen entspricht. In § 4.376–4.379 diskutiert Peirce, wie sich eine Implikation der Form $A \to C$ in einem graphischen System darstellen lässt. Die grundsätzliche Schwierigkeit besteht darin, dass wir natürlich *A* und *C* auf das Annahmeblatt schreiben müssen, um die Implikation auszudrücken, aber wenn wir *A* oder *C* direkt auf das Annahmeblatt schreiben, würde dass bedeuten, dass wir *A* bzw. *C* für wahr halten. Aus diesem Grund argumentiert Peirce, dass wir *A* und *C* mit Hilfe einer geschlossenen Linie von dem Annahmeblatt abtrennen müssen. Weiterhin argumentiert er, dass *C* tiefer als *A* durch eine derartige Linie eingeschlossen sein muss, womit er letztlich zu einer Struktur der Form

als natürlicher Darstellung der Implikation kommt. Dieses ist seines Erachtens eine zumindest teilweise ikonische Darstellung der Implikation. Aufgrund seiner Interpretation der Implikation wiederum kommt er zu dem Schluss, dass eine einfache geschlossene Linie der Negation des eingeschlossenen Graphen entspricht. Somit trägt auch die Negation mit Hilfe von geschlossenen Linien, den so genannten “Schnitten” (cuts), ikonische Züge.

2.3 Implikationen der Darstellung aus Sicht der formalen Logik

Die generellen Vorteile der zweischichtigen Architektur diagrammatischer Logiksysteme für deren Pragmatik ist bereits ausführlich diskutiert worden (Shimojima, 1996; Larkin and Simon, 1987; Berger, 2000; Shin, 2002; Oberlander, 1996). Es wird im allgemeinen argumentiert dass gerade die konkrete Syntax, auch “sekundäre Notation” genannt, die eigentlich bedeutsame Schicht zur Verbesserung der Pragmatik ist. Beispielsweise schreibt Oberlander in (Oberlander, 1996) dass die “sekundäre Notation den eigentlichen Kern graphischer Pragmatik darstellt – bedeutsame Strukturen, die über die bloße Semantik des Systems hinausgehen”.[16]

Im Folgenden werden einige Vorteile der zweischichtigen Struktur Existentieller Graphen sowie Unterschiede zu sequentiellen Logikformalisierungen herausgearbeitet. Da eine adäquate Formalisierung der Graphen bereits in der abstrakten Syntax nicht den Beschränkungen sequentieller Formalisierungen unterliegt, sind diese Vorteile und Unterschiede allerdings bereits in der abstrakten Syntax und nicht erst in der konkreten Syntax angesiedelt.

Stjernfelt stellt in (Stjernfelt, 2007) im Absatz “The Non-Trivial Icon Definition” eine einen operationalen Ansatz zur Definition der Ikonizität von Zeichen heraus, die über die bloße Ähnlichkeit von Zeichen und Bezeichnetem hinausgeht. Das wesentliche Kriterium dieses operationalen Ansatz ist, dass ein Ikon das einzige Zeiche ist, bei dessen Anschauung man mehr Informationen gewinnen kann, als zu dessen Konstruktion notwendig war. Die ersten beiden Vorteile -Kommutativität und Assoziativität (der Konjunktion) sowie die variablenfreie Darstellung in Existentiellen Graphen- sind mathematische Ausprägungen dieses Verständnisses von Ikonizität.

2.3.1 Kommutativität und Assoziativität

Die klassischen binären Logikoperatoren Konjunktion und Disjunktion sind kommutativ und assoziativ. D.h., es kommt weder auf die Reihenfolge noch auf die Klammerung von Teilausdrücken bei diesen Operationen an. Wir betrachten dazu die Kommutativität der Konjunktion. Beispielsweise sind die Formeln $A \wedge B$ und $B \wedge A$ verschieden, obwohl sie offensichtlich die gleiche Bedeutung haben. Die Verschiedenheit (aus syntaktischer

Sicht) der Formeln ist eine Folge aus der sequentiellen Formalisierung der Logik. Die semantische Äquivalenz muss in sequentiellen Formalisierungen durch entsprechende Ableitungsregeln im Kalkül erfasst werden, was sowohl aufwendig als auch unnatürlich erscheint. Wenn in Peirces Graphen mehrere Teilgraphen per Juxtaposition (die semantisch der Konjunktion entspricht) zu einem großen Graphen zusammengefügt werden, gibt es per se keine Reihenfolge der Teilgraphen. Folglich wird die Kommutativität der Konjunktion in Peirces Graphen bereits auf der Ebene der Syntax erfasst.

Die selben Überlegungen gelten auch für die Assoziativität der Konjunktion. Beispielsweise sind die Formeln $(A\wedge(B\wedge C))$ und $((A\wedge B)\wedge C)$ syntaktisch verschieden, obwohl sie trivialerweise dieselbe Bedeutung haben. Die semantische Äquivalenz der Formeln muss wieder durch entsprechende Regeln im Kalkül erfasst werden. In Peirces Graphen dagegen gibt es keine Klammern: die Assoziativität der Konjunktion wird auch bereits auf der Syntaxebene reflektiert.

Es ergeben sich daraus zwei Vorteile für die Peirce'schen Graphen: Zunächst sind die abstrakten Strukturen einfacher zu handhaben, und die entsprechenden diagrammatischen Repräsentationen sind einfacher lesbar und verstehbar. Zweitens wird auch der Kalkül für Existentielle Graphen einfacher, da es keine Notwendigkeit gibt, die Assoziativität der Konjunktion durch den Kalkül zu erfassen. Peirce selbst betont in § 4.374, dass im menschlichen Denken die Assoziativität und Kommutativität keine Signifikanz hat und folglich auch in einem logischen System keine Rolle spielen sollte.

Die Information, dass die Konjunktion sowohl assoziativ als auch kommutativ sind, kann also bereits – sogar sehr direkt– aus der Syntax Existentieller Graphen geschlossen werden, wohingegen dieses bei einer sequentiellen Formalisierung der formalen Logik nicht gegeben ist. Dieser Zusatzgewinn an Information ist das, was Stjernfelt in seinen operationalen Ansatz beschreibt.

Abschließend soll allerdings erwähnt werden, dass diese betrachteten Vorteile nicht genuin Vorteile einer Logikformalisierung mit graphischen Repräsentationen sind. Beispielsweise findet man in vielen Logikbüchern nach einer präzisen Einführung der Formeln Konventionen, die es erlauben, semantisch unnötige Klammern einfach wegzulassen. Nichtsdestotrotz ist bei Peirces Graphen die Assoziativität und Kommutativität der Konjunktion ein sehr natürlicher Bestandteil der Syntax, wohingegen bei sequentiellen Systemen zusätzlicher Aufwand nötig ist. Ähnliche Überlegungen kann man auch zu den Vorteilen, die in den nächsten beiden Abschnitten diskutiert werden, anstellen.

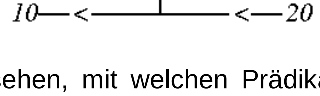
2.3.2 Variablenfreie Logik

Der wesentliche Schritt von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik erster Stufe besteht darin, dass man feingranularer nun auch über Objekte und deren Beziehungen Aussagen machen kann und dass man über diese Objekte auch quantifizieren kann (also Aussagen der Form "für alle Objekte gilt ..." oder "es gibt ein Objekt mit" treffen kann). Als Beispiel betrachten wir die Aussage, dass es eine Primzahl zwischen 10 und 20 gibt. Unter Vernachlässigung von Klammern kann das in der symbolischen Logik wie folgt ausgedrückt werden:

$$\exists x\in N:(10<x\wedge prim(x)\wedge x<20)$$

In dieser Formel wird mehrfach auf die unbekannte Primzahl referiert. Folglich brauchen wir einen Bezeichner für diese Primzahl, nämlich die Variable x, die mehrfach in der Formel benutzt wird. Die Notwendigkeit eines eindeutigen Bezeichners ist eine Folge der sequentiellen Formalisierung der Logik. Für die Lesbarkeit von Formeln sind Variablen eher hinderlich, da man zum korrekten Verständnis einer Formel den Überblick behalten muss, in welchen Prädikaten (in diesem Beispiel (zweimal '<' und *prim*) Instanzen der Variablen vorkommen.

Diagramme stellen andere Möglichkeiten bereit, um auf unbekannte Objekte zu referieren. In Existentiellen Graphen werden dazu Ligaturen, also Netzwerke von Identitätslinien benutzt. Der zur oben genannten Formel äquivalente Graph sieht wie folgt aus:



In diesem Diagramm ist einfacher zu sehen, mit welchen Prädikaten die Ligatur verbunden ist: Es fällt leichter, die semantische Bedeutung des Graphen als die (äquivalente) semantische Bedeutung der Formel zu erfassen. Diese variablenfreie Darstellung hängt offensichtlich eng mit der Ikonizität von Identitätslinien und Ligaturen zusammen.

Identitätslinien haben zwei weitere syntaktische Vorteile. Erstens ist es im Gegensatz zu Variablen nicht notwendig, eine Unterscheidung zwischen Identitätslinien und Instanzen von Identitätslinien zu treffen. Dieser Vorteil wird sogar bereits von Peirce als Vorteil von Identitätslinien gegenüber Variablen genannt, wie

Stjernfelt in der Note No. 90 in (Stjernfelt, 2007) beschreibt. Zweitens ist es in der symbolischen Logik notwendig, Regeln zu haben, mit denen Variablen umbenannt werden können. In unserem Beispiel hätten wir statt x auch die Variable y verwenden können, hätten also $\exists y \in N{:}(10<y \wedge prime(y) \wedge y<20)$ betrachtet. Wir brauchen dann aber Mittel, um die semantisch gleichen, aber syntaktisch verschiedenen Formeln ineinander überführen zu können. Ähnlich wie die im letzten Abschnitt angesprochenen Klammerkonventionen wird dazu in vielen Logikbüchern eine Konvention, die so genannte α-Konversion, eingeführt, die derartige Transformationen erlaubt. In Existentiellen Graphen sind derartige Konventionen unnötig.

Die Vorteile einer variablenfreien Notation kommen natürlich stärker zum Tragen, wenn über mehrere Objekte quantifiziert wird. Ein weiteres Beispiel ist das Produkt zweier binärer Relationen R und S auf einer Menge A, also

$$\{(x,y) \in A \times A \mid \exists z \in A{:}(x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}$$

Wenn man Existentielle Graphen zu Relationengraphen mit freien Stellen (freien “Valenzen” bei Peirce) erweitert, kann man mit Relationengraphen das Produkt von R und S auf sehr natürliche Weise darstellen:

$$?1 \text{———} {}^{1}\mathrm{R}^{2} \text{———} {}^{1}\mathrm{S}^{2} \text{———} ?2$$

(die freien Stellen werden in diesem Graph durch nummerierte Fragezeichen dargestellt).

Die Möglichkeit zur variablenfreien Darstellung ist ein weiteres Beispiel für den von operationalen Ansatz zur Ikonizität. Ein weiteres Mal ist bei den Existentiellen Graphen möglich, auf sehr einfache Weise aus ihrer Darstellung -hier die Identitätslinien zur Repräsentation von Objekten- zusätzliche Informationen zu schließen, wohingegen bei sequentiellen Formalisierungen zusätzliche Regeln notwendig sind (entweder die α-Konversion oder Regeln im Kalkül), die sich nicht aus den verwendeten Zeichen für Objekte, also Variablen, ergeben.

2.3.3 Mehrfache Lesarten

In der symbolischen Logik werden Formeln aus atomaren Formeln aufgebaut, beispielsweise durch Verknüpfung von Formeln mit logischen Operatoren, oder durch Quantifikation von Variablen. Diese induktive Definition ist sehr typisch für die symbolische Logik. Sie führt dazu, dass aus einer Formel die Schritte, die zum Aufbau der Formel führen, eindeutig rekonstruiert werden können (diese Eigenschaft wird “unique parsing property” genannt). Die Semantik von Formeln wird üblicherweise auch induktiv definiert: Erst für die atomaren Formeln, um sie dann induktiv, entlang ihres Aufbaus mit den genannten Schritten auf die gesamte Formel zu erweitern. Sogar die Regeln in den gängigen Kalkülen (beispielsweise Sequenzenkalkülen) orientieren sich stark an diesem induktiven Aufbau. Syntax, Semantik und Kalküle in der symbolischen Logik sind also reduktionistisch aufgebaut.

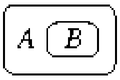
Diagramme werden von Menschen in der Regel nicht streng reduktionistisch erfasst. Stattdessen werden sie erst als ganzen wahrgenommen, bevor Teile des Diagramms genauer betrachtet werden. Dieser Ansatz, Graphen zu lesen, trägt holistische Züge.

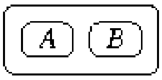
Shin untersucht in (Shin, 2002) an Hand Existenzieller Graphen die Unterschiede zwischen symbolischer und diagrammatischer Logik. Eine ihrer Hauptaussagen ist, dass die diagrammatische Logik bisher stark unterschätzt wurde, weil an sie Kriterien angelegt worden sind, die unhinterfragt von der symbolischen Logik übernommen worden sind. Ein Beispiel dafür sind Ansätze, die Semantik von Existentiellen Graphen zu verstehen, indem man sie in symbolische Logik übersetzt. Diese Übersetzungen nehmen auf die Besonderheiten von Existenziellen Graphen keine Rücksicht und führen deswegen zu sehr unhandlichen und schwer verständlichen Formeln, was wiederum zu dem Urteil führte, das Existentielle Graphen schwer zu lesen, also schwer zu verstehen, sind. Laut Shin ist die oben erwähnte eher holistische Leseansatz von Graphen ein entscheidendes Merkmal, das die Graphen von Formeln unterscheidet, da dieser holistische Ansatz zu verschiedenen Lesarten desselben Graphen führen kann. Dies soll kurz anhand von Alpha-Graphen erläutert werden.

Strenggenommen stellen Alpha-Graphen nur zwei logische Operatoren bereit: Die Konjunktion, graphisch durch das Nebeneinanderschreiben von Graphen dargestellt, und die Negation, die durch ein Negationsoval repräsentiert wird. In der Aussagenlogik sind diese beiden Operatoren, in der symbolischen Logik durch $\wedge$ und $\neg$ dargestellt, ausreichend. Mathematische Arbeiten zu Alpha-Graphen übersetzen darum die Graphen in der Regel zu Formeln, die nur diese beiden Operatoren benutzen. Allerdings diskutiert bereits Peirce andere Lesarten seiner Graphen. Zwei ineinandergeschachtelte Negationsovale, wobei beide Negationsovale weitere Elemente enthalten dürfen, liest er in der Regel explizit als materiale Implikation (die symbolischen Formeln $\neg(f \wedge \neg g)$ und $f \rightarrow g$ sind semantisch äquivalent), und er führt den Begriff “Einbettung” (“scroll”) für diese Anordnung von Negationsovalen ein.

Wir betrachten nun den linken Graphen, in dem *A* und *B* für beliebige andere Graphen stehen. Strenggenommen sollte er in $\neg(A \wedge \neg B)$ übersetzt werden, aber für die Leser, die sich mit dem Konzept der Einbettung vertraut gemacht haben, ist die Lesart $A \rightarrow B$ natürlicher.

Der rechte Graph kann natürlich in $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ übersetzt werden. Man kann aber auch auf zwei verschiedene Arten eine Einbettung darin wahrnehmen, was zu den Lesarten $\neg A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow A$ führt. Eine weitere Heuristik führt zu der Lesart $A \vee B$. Alle diese Lesarten sind syntaktisch verschieden, aber natürlich semantisch äquivalent.





Diese verschiedenen Lesarten eines Graphen hängen davon ab, wie ein Leser den Graphen in Bestandteile zerlegt. Laut Shin sind die mehrfachen Lesarten für diagrammatische Systeme sehr viel natürlicher als eindeutig festgelegte Lesarten. Sie zeigt zudem in (Shin, 2002) wie durch Übersetzungen von Graphen in Mengen von Formeln dieser holistische Leseansatz auch mathematisch präzise erfasst werden kann.

3. Zur Ikonizität der Ableitungsregeln

Peirce hat seine Existentiellen Graphen zur Analyse mathematischer Argumentationen entwickelt. Dies ist, wie bereits beschrieben, der Grund, dass Peirce seine Graphen so ikonisch wie möglich entworfen hat. Für die Darstellung von Aussagen führte dieser Ansatz zu der diagrammatischen Darstellung in Form von Graphen. Seine Graphen werden deswegen häufig als vorrangig graphische, visuelle Logik antizipiert. Eine umfassende Analyse dieser graphischen Darstellung aus Sicht der mathematischen Logik stellt (Shin, 2002) bereit. Shin hebt in ihrer Arbeit die visuellen Eigenschaften der Graphen hervor und untersucht sowohl die Syntax und die Semantik (die Herausarbeitung der verschiedenen Lesarten von Graphen ist eine ihrer wesentlichen Errungenschaften), aber auch die Ableitungsregeln aus dieser Sicht. Der Fokus auf die visuellen Eigenschaften der Graphen lässt Shin zu dem Schluss kommen, dass Peirce in dem Bemühen, die Ikonizität der Graphen herauszuarbeiten, teilweise versagt hat. Deshalb restrukturiert sie Peirces Ableitungsregeln und erarbeitet neue Regeln, deren visuelle Eigenschaften einfacher zu verstehen sind. Doch ist die von Shin vorgenommene Gleichsetzung von Ikonizität und visueller Sichtbarkeit für das Verständnis der Ikonizität der Ableitungsregeln im Peirceschen System nicht angemessen. Dieses soll hier abschließend kurz diskutiert werden.

Die Ikonizität von bestimmten graphischen Elementen kann man durch deren Ähnlichkeit zu entsprechenden logischen Operationen erklären. So gibt es Entsprechungen der Darstellung der Identitätslinie zur existentielle Quantifikation und zur Identität, also zu logischen Operationen, und es gibt Entsprechungen zwischen der Juxtaposition als graphischer Konstruktion zur Konjunktion als logischer Operation. Die Ableitungsregeln hingegen sollen die Formen mathematischer Argumentation reflektieren. Nicht die visuelle Darstellung der Ableitungsregeln macht also deren Ikonizität aus, sondern die Ähnlichkeit der Ableitungsregeln mit Formen von (mathematischer) Argumentation. Peirce behandelt an mehreren Stellen die generellen Muster menschlichen Denkens aus seiner Sicht. Beispielsweise beschreibt er in § 5.579, dass bei einer Argumentation zunächst die notwendigen Prämissen in einer kopulativen Aussage zusammengebracht (colligated) werden. Auf den so entstehenden Graphen werden mentale Experimente durchgeführt. Die Aussagen, von denen mehrfach Gebrauch gemacht wird, werden dupliziert, andere Aussagen dagegen werden entfernt, und das Ergebnis dieser Operationen wird dann genauer betrachtet. Peirce schreibt: “Genau diese drei Dinge sind es die in jedwedem deduktiven Experiment auftauchen – Zusammenführung, Iteration, Auslöschung”.[17] Die Ableitungsregeln Existentieller Graphen entsprechen also einer Verfeinerung der (mentalen) Operationen, die bei einer Argumentation durchgeführt werden. In § 4.6 schreibt er sehr explizit, dass sich in den Graphen “vor den Augen des Betrachters die Denkoperationen in actu widerspiegeln”.[18] Hier liegt der Kern der Ikonizität der Ableitungsregeln: Nicht in deren visuellen oder graphischen Darstellungen, sondern in der Ähnlichkeit von internen mentalen Denkoperationen und externen Darstellungen in Form von Graphtransformationen.

Interessanterweise wird dieser Ansatz in der psychologischen Theorie mentaler Modelle bestätigt. In dieser Forschungsrichtung wird argumentiert, dass sich Denken in der Tat in Teiloperationen zerlegen lässt, und in dieser Theorie ist die Ikonizität der Modelle von wesentlicher Bedeutung. Johnson-Laird untersucht in (Johnson-Laird, 2002) die Existentiellen Graphen aus der Sicht dieser psychologischen Theorie, und er stellt die Ähnlichkeit der Peirce'schen Ableitungsregeln mit den Prozessen heraus, in denen Menschen mentale Modelle konstruieren. Somit kommt er zu dem Schluss, dass die “mentalen Modelle den Peirce'schen Graphen ähneln”.[19]

Anmerkungen

1 Im Original: Inspired by Kant, he devoted his life to providing foundations for knowledge and, in the course of doing so, he brought together a number of different philosophical doctrines.
2 Verweise der Form *x.y* referenzieren wie üblich (Hartshorne and Burks, 1935), Buch *x*, Absatz *y*
3 Im Original: all thought, therefore, must necessarily be in signs.
4 Im Original: all indispensable in all reasoning.
5 Im Original: The term "logic" […] in its broader sense, it is the science of the necessary laws of thought, or, still better (thought always taking place by means of signs), it is general semeiotic, treating not merely of truth, but also of the general conditions of signs being signs […], also of the laws of the evolution of thought..
6 Im Original: an arbitrarily hypothetical universe, a creation of a mind.
7 Im Original: the soul of the reasoning has even here not been caught in the logical net.
8 Im Original: Theoretically, I grant you, there is no possibility of error in necessary reasoning. […] In practice and in fact, mathematics is not exempt from the liability to error that affects everything that man does.
9 Diese Selbstreferenz ist ein Spezialfall der Peirceschen hypostatischen Abstraktion, die in die moderne Informatik als so genannte Reifikation Einzug gehalten hat.
10 Im Original: This conception [of reality] essentially involves the notation of a COMMUNITY, without definite limits, and capable of a definite increase of knowledge.
11 Im Original: A person is not absolutely an individual. His thoughts are what 'he is saying to himself', that is, is saying to that other self that is just coming into life in the flow of time.
12 Im Original: The aim [of EGs] was not to facilitate reasoning, but to facilitate the study of reasoning.
13 Im Original: If both are written on different parts of the sheet of assertion, the independent presence on the sheet of the two expressions is analogous to the independent truth of the two propositions.
14 Im Original: The line of identity is, moreover, in the highest degree iconic.
15 Im Original: You cannot have an iconic representation of negation, […] negation cannot be perceived.
16 Im Original: Secondary notation is the very stuff of graphical pragmatics–meaningful structures which go beyond the plain semantics of the system.
17 Im Original: Precisely those three things are all that enter into the experiment of any Deduction – Colligation, Iteration, Erasure.
18 Im Original: by rendering literally visible before one's very eyes the operation of thinking in actu.
19 Im Original: mental models are similar to Peirces graphs.

Literatur

Berger, Shai (2000), Studies on the Uses and Usefulness of Diagrams. Master's thesis, ILLC, University of Amsterdam.

Dau, Frithjof (2003a), "Concept Graphs without Negations: Standardmodels and Standardgraphs". In: Aldo de Moor, Wilfried Lex, and Bernhard Ganter, (eds), Conceptual Structures for Knowledge Creation and Communication. Volume 2746 of *LNAI*, pages 243–256. Springer, Berlin – Heidelberg – New York. This paper is a part of Dau (2003b) as well.

Dau, Frithjof (2003b), The Logic System of Concept Graphs with Negations and its Relationship to Predicate Logic. Volume 2892 of *LNAI*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York.

Dau, Frithjof (2004). "Types and tokens for logic with diagrams: A mathematical approach". In: Karl Erich Wolff, Heather Pfeiffer, and Harry Delugach, (eds), Conceptual Structures at Work: 12th International Conference on Conceptual Structures. Vol 3127 of *LNCS*, Springer, Berlin – Heidelberg – New York.

Hartshorne, Weiss and Burks, (eds) (1931–1935), Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press.

Hookway, Christopher (1985), Peirce. London: Routledge and Kegan Paul.

Howse, John; Molina, Fernando, Shin, Sun-Joo;und Taylor, John (2002). "On Diagram Tokens and Types". In: Hegarty, Meyer, and Narayanan, (eds), Diagrams,volume 2317 of LNCS, Springer, Berlin – Heidelberg – New York.

Johnson-Laird, Philip N. (2002), "Peirce, logic diagrams, and the elementary operations of reasoning". In: Thinking and Reasoning, 8(1):69–95.

Larkin, Jill H. und Simon, Herbert A. (1987). "Why a Diagram is (sometimes) worth ten thousand Words". In:

Cognitive Science, 11(1):65–100.
Oberlander, Jon (1996). “Grice for Graphics: Pragmatic Implicature in Network Diagrams. Information Design Journal, 8(6):163—179.
Pape, Helmut (1983). Charles S. Peirce: Phänomen und Logik der Zeichen. Suhrkamp Verlag Wissenschaft, Frankfurt am Main, Germany. Deutsche Übersetzung von Peirces Syllabus of Certain Topics of Logic.
Charles Sanders Peirce (1992). “Reasoning and the Logic of Things”. In Kremer and Putnam, (eds): The Cambridge Conferences Lectures of 1898. Harvard Univ. Press, Cambridge.
Shimojima, Atsushi (1996). On the Efficacy of Representation. PhD thesis, The Department of Philosophy, Indiana University.
Shin, Sun-Joo (2002). The Iconic Logic of Peirce’s Graphs. Bradford Book, Massachusetts.
Stjernfelt, Frederik (2007). Diagrammotology. An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics. Synthese Library. Springer, Berlin – Heidelberg – New York.

Dr. Frithjof Dau
Baluschekstraße 8
01159 Dresden